UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
MATEMÁTICAS V (MA-2112)

Guía de ejercicios de la Prof. Libuska Juriceck. (Parte 1)

Ejercicios del primer parcial.

---

1. ¿ Existe el límite?

a. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^4+y^4}$ **b.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sin x \sin y}$ **c.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^4-2x^3+x^2+x^2y^2}{(x-1)^2+y^2}$

2. Definir $f(0,0)$ de modo que f sea continua en $(0,0)$.

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{1-\cos(\sqrt{x^2+y^2})}$$

3. Sea $f(x,y) = \begin{cases} x^2y & ,\text{si } y+x^2 \geq 0 \\ xy^2 & ,\text{si } y+x^2 < 0 \end{cases}$ y los puntos $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

a. ¿Es f continua en estos puntos?
b. Calcular ∇f en estos puntos.
c. ¿Es f diferenciable en estos puntos?
d. En cada uno de los puntos dados donde existe un plano tangente a la gráfica de f, dar la ecuación de este plano tangente.

4. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^4}{x^4+y^6} & ,\text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,\text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostrar que en $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ f tiene una derivada en cualquier dirección

5. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & ,\text{si } x \geq y^2 \\ y^3 & ,\text{si } x < y^2 \end{cases}$$

a. ¿ En qué puntos de la curva de ecuación $x = y^2$ existe la derivada de f en la dirección $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$?

b. ¿ En qué puntos de la curva de ecuación $x = y^2$ es f diferenciable?

6. En el punto $A = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ calcular el valor de la derivada de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2$ en la dirección de la tangente en A de la curva intersección de la gráficas de ecuación $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25$ y $x^2 + y^2 = z^2$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 la superficie S de ecuación $f(x,y,z) = 4$ que pasa por el punto $A = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$. Sea v la tangente (con primera componente < 0) en $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ a la curva intersección de las superficies de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $3xy + z = 4$. El valor en A de la derivada de f en la dirección correspondiente a v es máximo y vale 2.
Hallar la ecuación del plano tangente en A a la superficie S.

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , $u(x,y,z) = x\cos x$, $v(x,y,z) = x - 2z$. Sabiendo que la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $G(x,y,z) = f(u(x,y,z), v(x,y,z)) = 4$ en el punto $(1,0,2)$ es $3x - z = 1$, hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $f(u,v) = 4$ en el punto $(1,-3)$.

9. Sean f y g funciones diferenciables y $h(x,y,z) = f\left(g\left(u(x,y,z), v(x,y,z)\right)\right)$ con $u(x,y,z) = e^{xy}$, $v(x,y,z) = x^2 + \cos z$. Hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(0,1,\frac{\pi}{2})$ a la superficie de ecuación $h(x,y,z) = 1$, sabiendo que $f(-1) = 1$, $f'(-1) = 2$, $\nabla g(1,0) = (3,-2)$.

10. Sea $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable, $v(x,y) = x^2 + y$,
$h(x,y) = v(x,y) f\left(\dfrac{u(x,y)}{v(x,y)}\right)$.

a. ¿ Es h diferenciable en $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$?.

b. Si $\nabla h(-1,1) = (-6,3)$, $u(-1,1)) - 2$, $f(-1) = 3$, $f'(-1) = 5$. Calcular $\nabla u(-1,1)$.

11. Sea $z = f(x,y)$ definida implícitamente por $ze^z - 3(x^2 + y^2) + 2xy = 0$. Decidir si $(0,0)$ es un punto crítico de f y en caso de que lo sea, diga qué tipo es.

12. Hallar y clasificar los puntos críticos de $f(x,y) = x^4 + \frac{2}{3}y^3 + 4y^2 - x^2y^2 + 2$.

13. Hallar el máximo y el mínimo de $f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 6y^2$ en el conjunto
D= $\{(x,y) | y \geq 3x^2 + 1, y + x \leq 3\}$.

14. Diseñar una lata cilíndrica con tapa, que contenga 1 litro de líquido, usando la mínima cantidad de metal.

RESPUESTAS.

1.a. No existe. **1.b**. Existe y vale 1. **1.c**. Existe y vale 1. **2** $f(0,0) = 2$

3. En $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ f es continua y diferenciable, $\nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es $z = y$. En $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ f no es continua, $\nabla f(-1,1)$ no existe. En $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ f es continua y diferenciable, $\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es $z = 0$.

4. f no es continua en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. **5.a**. $\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. **5.b**. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **6**. Cero. **7**. $y-3 = x-2$

8. $5u + v = 2$ **9**. $6x + 4z = 2\pi$ **10.a**. Sí lo es. **10.b**. $(2,-1)$

11. $(0,0)$ es un punto crítico donde f tiene un mínimo local.

12. Los puntos $\begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -\sqrt{8} \\ 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}$, son puntos silla. En $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ f tiene un máximo local. En $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ f tiene un mínimo local.

13. ∇f se anula en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ pero estos puntos críticos no pertenecen a al interior de D. En la frontera de D obtenemos: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $f(0,1) = 6$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ con $f(-1,4) = 83$, $\begin{pmatrix} 2/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$ con $f(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}) = \frac{806}{27}$, luego $\max_D f = 83$, $\min_D f = 6$.

14. altura= $\dfrac{20}{\sqrt[3]{2\pi}}$ cm, radio de la base= $\dfrac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$ cm.

Nota: Este material fue digitalizado por Miguel Labrador para GUIAS USB. La autoría del contenido es de la Prof. Libuska Juriceck.

Miguel Labrador
12-10423
Ingeniería Electrónica
Twitter: @MiguelAngel2801

gecousb.com.ve
Twitter: @gecousb
Instagram: gecousb

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección miguelangel2801@gmail.com